# SUCESIONES Y SERIES DE FUNCIONES

**Ejercicio 1.** $f_n(x) = \dfrac{x^{2n}-1}{x^{2n}+1}, \quad x \in \mathbb{R}$.

Campo de convergencia $A = \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{Si} \quad |x| < 1 \\ 1 & \text{Si} \quad |x| > 1 \\ 0 & \text{Si} \quad |x| = 1 \end{cases}$$

¿Es $f_n$ continua en $A$?
☒ Si.
☐ No

¿Es $f$ continua en $A$?
☐ Si.
☒ No

¿Se puede asegurar con los resultados anteriores si hay o no convergencia uniforme?
☒ Si. No hay convergencia uniforme. Si la convergencia fuera uniforme, el límite sería una función continua y ya hemos visto que no lo es.
☐ No

¿Es $\{f_n(x)\}$ uniformemente acotada?
☒ Si. $\left|\dfrac{x^{2n}-1}{x^{2n}+1}\right| \leq 1, \ \forall x \in \mathbb{R}, \ \forall n \in \mathbb{N}$
☐ No

¿Se puede aplicar el teorema de Arzelà?
☒ Si, y permuta el límite y la integral.
☐ No, porque

¿Es $f_n(x)$ derivable en $A$, $\forall n \in \mathbb{N}$?
☒ Si. $f_n'(x) = \dfrac{4nx^{2n-1}}{(x^{2n}+1)^2}$
☐ No

Campo de convergencia y límite puntual de $\{f_n'(x)\}$
En los únicos puntos donde no hay convergencia es en el 1 y -1
$A = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, \infty)$
$g(x) = 0, \ \forall x \in A$

¿Se puede asegurar si hay o no convergencia uniforme de la sucesión derivada, con los resultados anteriores y el teorema de convergencia uniforme y derivación?
Si, la convergencia de $f_n'$ a $f$ no es uniforme. Si lo fuera, podríamos aplicar el teorema y la convergencia de $f_n$ a $f$ sería uniforme y ya hemos visto que no lo es.

**Ejercicio 2.** $f_n(x) = \dfrac{\sin n^2 x}{n}, \quad x \in [-\pi, \pi]$.

Campo de convergencia $A = [-\pi, \pi]$

$f(x) = 0, \ \forall x \in A$

¿Es $f_n$ continua en $A$?
☒ Si.
☐ No

¿Es $f$ continua en $A$?
☒ Si.
☐ No

¿Se puede asegurar con los resultados anteriores si hay o no convergencia uniforme?
☐ Si.
☒ No se puede asegurar ya que aunque la convergencia uniforme conserva la continuidad, puede ocurrir que el límite sea una función continua sin que la convergencia sea uniforme.

Aplica el criterio del supremo para asegurar si hay o no convergencia uniforme

$$M_n = \max_{x \in [-\pi,\pi]} \left|\frac{\sin n^2 x}{n}\right| = \frac{1}{n} \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \ \Rightarrow \ f_n \longrightarrow f \text{ uniformemente}$$

¿Permuta el límite con la integral?
☒ Si, porque la convergencia es uniforme.
☐ No, porque

¿Es $f_n(x)$ derivable en $A$, $\forall n \in \mathbb{N}$?
☒ Si. $f_n'(x) = n\cos(n^2 x)$
☐ No

Campo de convergencia y límite puntual de $\{f_n'(x)\}$ ?
Sólo converge cuando el coseno es cero.
$A = \{x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$
$g(x) = 0$, $\forall x \in A$

**Ejercicio 3.** Se considera la serie de funciones
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n}, \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

1. Demuestra que el campo de convergencia es todo $\mathbb{R}$ y halla la función límite (suma de la serie).

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n} = x^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)^n}.$$

La serie es una geométrica que converge si la razón es mayor que 1, luego converge para todo $x \neq 0$ al valor

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n} = x^2 \frac{\frac{1}{1+x^2}}{1 - \frac{1}{1+x^2}} = 1.$$

Además, en $x = 0$ se tiene la serie nula que también converge.

Campo de convergencia $A = \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

2. Aplica el criterio $M$ de Weierstrass para demostrar que hay convergencia uniforme en el intervalo $[1,2]$. Encuentra constantes $M_n$ y da un valor por el que está acota la serie en ese intervalo.

$$\frac{x^2}{(1+x^2)^n} \leq \frac{x^2}{(1+1)^n} = \frac{x^2}{2^n} \leq \frac{4}{2^n},\ \forall x \in [1,2].$$

Como $\sum_{n=1}^{\infty} M_n \leq 4 < \infty$, la convergencia es uniforme en $[1,2]$.

3. ¿Hay convergencia uniforme en el intervalo $[-1,1]$?

La convergencia no puede ser uniforme en $[-1,1]$ porque la convergencia uniforme conserva la continuidad y aunque la sucesión está formada por funciones continuas, el límite no es una función continua en dicho intervalo.

4. Calcula las constantes (más ajustadas posibles) $M_n$ del criterio $M$ de Weierstrass para el intervalo $[-1, 1]$ y comprueba que la serie correspondiente no converge.

Para cada $n$, la función $f_n(x) = \dfrac{x^2}{(1+x^2)^n}$ es continua en $[-1, 1]$ y por tanto alcanza el máximo. Vamos a calcular

$$M_n = \max_{x\in[-1,1]} f_n(x) = \max_{x\in[0,1]} f_n(x) \text{ (por simetría).}$$

$$f_n'(x) = \frac{2x[1-x^2(n-1)]}{(1+x^2)^{n+1}} = 0 \Rightarrow x = 0,\ x^2 = \frac{1}{n-1} \quad \text{(para } n \geq 2).$$

luego el máximo está en $x = \dfrac{1}{\sqrt{n-1}}$, para cada $n \geq 2$ y tendremos

$$M_n = f_n\left(\frac{1}{\sqrt{n-1}}\right) = \frac{1}{(n-1)\left(1+\dfrac{1}{n-1}\right)^n}.$$

Como

$$\frac{1}{\left(1+\dfrac{1}{n-1}\right)^n} \longrightarrow \frac{1}{e},$$

se tiene que la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ se comporta como la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n-1}$ y por tanto diverge.